

# FLUIDODINAMICA

La parte della meccanica dei fluidi che studia il movimento dei liquidi e dei gas si chiama **fluidodinamica**. Quando si studia il movimento di un fluido, conviene pensarlo come "ideale" cioè privo di attriti tra le singole molecole che lo compongono (**viscosità**) e tra le molecole e le pareti del recipiente o condotto che lo contiene. Inoltre si ritiene che il liquido sia **incompressibile**, vale a dire che la sua densità rimane costante.

Def 1. Si chiama **linea di corrente** la curva che ha per tangente in ogni suo punto il vettore velocità delle particelle del fluido.

Def 2. Si chiama **vena fluida** la parte di fluido limitata verticalmente da due sezioni  $S_1$  e  $S_2$  e lateralmente da un certo fascio di linee di corrente.

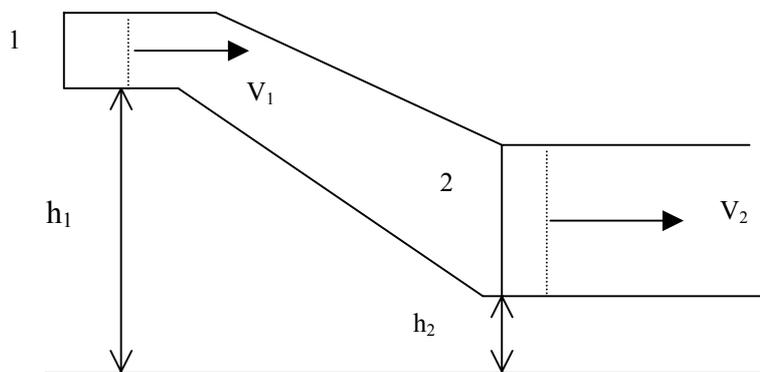
Def 3. Un fluido è in **regime stazionario** (o permanente) quando scorre in modo che la forma delle linee di corrente non si altera nel tempo. Ciò significa che la pressione e la velocità delle particelle del fluido si mantengono in ogni punto costanti nel tempo, pur essendo diverse da luogo a luogo. In regime permanente le linee di corrente coincidono con le traiettorie delle particelle del fluido.

Def 4. Un fluido è in **regime laminare** quando i diversi strati del fluido scorrono gli uni sugli altri senza mescolarsi, come nel caso dell'acqua che esce da un rubinetto poco aperto.

Def 5. Un fluido è in **regime turbolento** quando è animato da moti vorticosi che producono un rimescolamento in tutta la massa del fluido, come nel caso dell'acqua che esce da un rubinetto molto aperto.

## legge di Bernoulli

Si consideri un fluido in regime stazionario che scorre in un tubo o in una vena nel quale cambi, oltre all'area della sezione trasversale, anche la quota.



Per il principio di conservazione della massa si ha che:

$$m_1 = m_2 \quad d_1 V_1 = d_2 V_2 \quad d_1 S_1 X_1 = d_2 S_2 X_2 \quad d_1 S_1 V_1 t = d_2 S_2 V_2 t$$

se il fluido è incompressibile  $d_1 = d_2$  e quindi  $S_1 V_1 = S_2 V_2$  *equazione di continuità*

la quale mostra che la velocità del fluido è inversamente proporzionale alla sezione della vena.

La grandezza  $Q = \text{volume}/\text{tempo} = SV$  che rappresenta il volume di fluido che passa nell'unità di tempo si chiama **portata volumica** e si misura in  $\text{m}^3/\text{s}$ . La grandezza  $SVd$  si chiama **portata massica** e si misura in  $\text{Kg}/\text{s}$

Bernoulli nel 1738 enunciò il seguente teorema che esprime la legge di conservazione dell'energia nel caso di una massa fluida in movimento:

$$(1) \quad p_1 + dgh_1 + \frac{1}{2} dv_1^2 = p_2 + dgh_2 + \frac{1}{2} dv_2^2$$

ovvero:

$$(2) \quad p + dgh + \frac{1}{2} dv^2 = \text{cost}$$

dove i tre termini della (2) vennero così chiamati:

$p$  = pressione vera o piezometrica ( se il tubo è aperto  $P$  è la pressione atmosferica)

$dgh$  = pressione d'altezza (dovuta alla gravità)

$\frac{1}{2} dv^2$  = pressione dinamica (dovuta al moto del fluido)

Il teorema di Bernoulli è fondamentale nella risoluzione di molti problemi di idrodinamica, vediamo alcuni esempi:

**Es 1.** L'equazione di Bernoulli ha validità generale nel senso che descrive il comportamento di un fluido anche quando questo è fermo. Infatti, in tal caso, la (1) diventa:

$$p_1 - p_2 = dg(h_2 - h_1) = dgh$$

che è la nota legge di Stevino.

**Es 2.** Determinare la pressione di un fluido in una strozzatura

Se il fluido scorre in un condotto orizzontale munito di strozzatura, essendo  $h_1=h_2$ , si ricava dalla (1) che se  $v_1$  e  $v_2$  sono le velocità nelle due sezioni  $S_1$  e  $S_2$ :

$$p_1 + \frac{1}{2} dv_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} dv_2^2$$

$$p + \frac{1}{2} dv^2 = \text{cost}$$

Questo risultato esprime che, quanto maggiore è la velocità (diminuzione della sezione) del fluido tanto minore è la pressione, e viceversa.

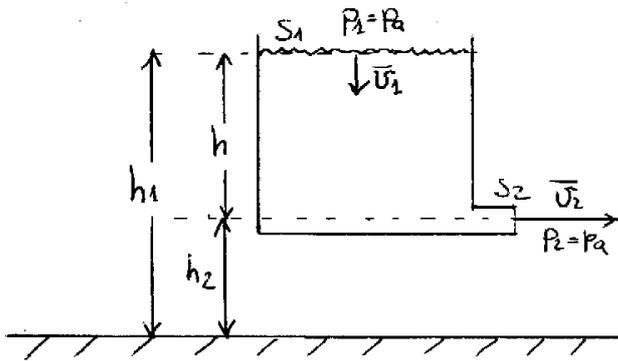
### PRINCIPIO DI BERNOULLI: alcuni esempi

Applicando il principio di Bernoulli abbiamo osservato che se si riesce a far sì che il fluido si muova rapidamente su un lato di una cosa, su quel lato la pressione del fluido è minore; vediamo come tale scoperta la si applica in diversi situazioni.

- **Soffiando tra due fogli** sospesi verticalmente l'aria viene sospinta parallelamente ad essi ed i fogli si avvicinano perché si muovono nella direzione che presenta minore pressione. Inoltre, se si soffia aria sulla superficie superiore di un foglio tenuto orizzontalmente, questo si solleva, poiché la pressione dell'aria sulla superficie superiore è minore di quella sulla superficie inferiore.
- Se si apre il **finestrino dell'auto** appena un filo noterete che il fumo prodotto all'interno dell'auto viene trascinato fuori grazie alla minor pressione esterna. Se sporgiamo la mano dal finestrino di un'auto in corsa sentiamo un aumento della pressione associata alla velocità relativa dell'aria esterna e non una diminuzione. In questo modo però noi sentiamo la pressione e il flusso contemporaneamente: la pressione deve essere misurata in modo che non interferisca con il flusso.

- Quando l'aeroplano si muove, l'aria urta contro l'orlo anteriore dell'ala e si divide: parte scorre sotto l'ala, parte sopra. La parte superiore dell'ala è sempre curva, e quindi un po' più lunga della faccia inferiore, ma le particelle dell'aria impiegano lo stesso tempo a percorrere le due facce. Le particelle che scorrono sulla faccia superiore dovendo fare un percorso più lungo nello stesso tempo sono più veloci e ciò alleggerisce la pressione su tale faccia. La maggior pressione sotto l'ala produce la forza verso l'alto che agisce sull'ala stessa.
- Quando si forma una **tromba d'aria** avviene che le finestre delle case esplodono verso l'esterno, oppure i tetti delle case vengono sollevati. Perché l'apertura delle finestre durante questi fenomeni aiuta, sebbene ciò possa sembrare un controsenso? Durante tale fenomeno la velocità del vento è molto elevata e quindi secondo Bernoulli ciò causa una bassa pressione in prossimità degli edifici. La pressione interna alle abitazioni dovuta all'aria risultando maggiore di quella esterna determina una forza risultante che può frantumare le finestre. Aprendo le finestre, la differenza di pressione fra l'interno e l'esterno diminuisce.

### Determinare la velocità di deflusso di un liquido da un recipiente. Legge di Torricelli.



Un recipiente pieno d'acqua ha un foro apribile alla profondità  $h$  dalla superficie libera del liquido ed è appoggiato su di un tavolo. Se il foro è ad un'altezza  $h_2$  rispetto al pavimento, quale è la velocità di deflusso?

Applichiamo l'equazione di Bernoulli a due sezioni: quella  $S_1$  corrispondente alla superficie libera del liquido nel recipiente e la sezione  $S_2$  del foro di uscita. Dal momento che la superficie libera è molto grande rispetto alla

sezione del foro di uscita si può ritenere che la velocità con cui si abbassa tale superficie sia piccolissima; ciò equivale a ritenere praticamente nulla la velocità  $v_1$  con cui si muove il liquido in corrispondenza di  $S_1$ . Inoltre, la pressione  $p_1$  che si riscontra in corrispondenza di  $S_1$  è la pressione atmosferica  $p_a$ . Poiché si ritiene di poter identificare anche  $p_2$  con  $p_a$ , la relazione (1) diventa:

$$dgh_1 = dgh_2 + \frac{1}{2} dv_2^2$$

Semplificando l'espressione per  $d$ , si ricava la velocità cercata:

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

Questo risultato esprime la legge già scoperta da Torricelli nel 1641 secondo cui "La velocità di deflusso di un liquido da un recipiente è la stessa di quella che acquisterebbe un grave se cadesse liberamente nel vuoto dalla stessa altezza del liquido" (ottenuta applicando il principio di conservazione dell'energia)"

### pressione relativa

**def:** La pressione relativa  $p_r$  è la differenza tra la pressione assoluta  $p$  di un fluido e la pressione atmosferica  $p_a$   $p_r = p - p_a$

Es: Nell'uomo la pressione media del sangue quando viene pompato dal cuore nell'aorta è di circa 100 mmHg. Questa è una pressione relativa e ci dice di quanto la pressione sanguigna supera quella atmosferica. La pressione effettiva nell'aorta varia durante ogni ciclo cardiaco. La pressione massima (sistolica) che normalmente è dell'ordine di 120 mmHg ( $p = 760 + 120 = 880$  mmHg) si ha

quando il cuore si contrae, e la pressione minima (diastolica) che è dell'ordine di 80 mmHg ( $p=760+80=840$  mmHg) si ha quando il cuore si rilassa.

In una persona in posizione eretta i piedi si trovano ad essere circa 1.3 metri sotto il cuore. Qual è la differenza di pressione tra la pressione del sangue nell'arteria del piede e nell'aorta?

$$\Delta p = \rho gh = 1.05 \times 10^3 \times 9.8 \times 1.3 = 1.37 \times 10^4 \text{ Pa} = 103 \text{ Torr}$$

La pressione relativa arteriosa nei piedi è il doppio di quella dell'aorta. E' per questo che la gente che sta molto tempo in piedi ha i piedi gonfi.

**Sfignomanometro.** Il manometro è collegato ad un bracciale gonfiabile che viene avvolto attorno all'avambraccio. Pommandovi dentro l'aria si porta prima la pressione dell'aria nel bracciale ad un valore maggiore della pressione sistolica. Questo provoca lo schiacciamento dell'arteria brachiale bloccando il sangue. L'aria viene quindi fatta uscire mentre con uno stetoscopio si sta in ascolto del ritorno di un impulso nel braccio. Il primo rumore si avverte quando la pressione nel bracciale è uguale alla pressione sistolica del sangue, perché allora un po' di sangue, in condizioni di massima pressione, riesce a passare attraverso l'arteria schiacciata. Si fa uscire quindi altra aria dal bracciale per abbassare ulteriormente la pressione. Il rumore cessa quando la pressione uguaglia la pressione diastolica del sangue perché allora il sangue a bassa pressione può passare liberamente nel braccio attraverso l'arteria.

Es. 1. In un adulto a riposo normale a riposo la velocità media del sangue attraverso l'aorta è di 0.33 m/s. Qual è la portata attraverso di raggio 9 mm?

$$Q = 83 \text{ cm}^3/\text{s}$$

Dall'aorta il sangue fluisce nelle arterie maggiori e poi in quelle più piccole (arteriole) e infine nei capillari. Sebbene la sezione di ogni singola arteria sia più piccola di quella dell'aorta, la sezione complessiva di tutte le arterie maggiori è di  $20 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  che è molto maggiore della sezione dell'aorta. Data che la quantità di fluido che scorre in queste arterie e nell'aorta è la stessa ricaviamo che il sangue si muove più lentamente nelle arterie ( $v=0.041$  m/s). La sezione totale di tutti i capillari è di  $0.25 \text{ m}^2$ , per cui la velocità media del sangue in essi è di soli  $3.3 \times 10^{-4}$  m/s

Es 2. Qual è la **potenza del cuore** in un adulto normale a riposo?

$$P = L/t = Fd/t = Fv$$

dove F è la forza esercitata dal cuore sul sangue, d è la distanza percorsa dal sangue nel tempo t e v è la velocità del sangue quando esce dal cuore

$$\text{ma } F = pS \text{ perciò } P = pSv = pQ = 1.3 \times 10^4 \text{ (N/m}^2) \times 0.83 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 1.1 \text{ Nxm/s} = 1.1 \text{ J/s} = 1.1 \text{ W}$$